ISBN: 978-602-0791-28-9

MENURUNKAN FORMULA INTERGRAL FUNGSI RASIONAL

Wahyudi
Universitas Muhammadiyah Ponorogo
wahyudi@umpo.ac.id

Abstrak

Menyelesaikan soal yang berkaitan dengan integral yang tidak biasa, perlu memerlukan prosedural yang sistematis untuk mendapatkan solusinya. Seperti halnya, integral yang memuat ax^2+bx+c memerlukan ketelitian tinggi. Terdapat berbagai penyelesaian yang diberikan pada ilmu matematika. Untuk menyelesaikan soal yang berkaitan dengan integral fungsi rasional (khususnya polinomial dengan penyebut berderajat dua) dengan menggunakan $\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx = \frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}} \ln\left(\frac{2ax+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2ax+b+\sqrt{b^2-4ac}}\right)+C$

Kata kunci: integral, fungsi rasional, sistematis

Abstract

Solving problems related to unusual integrals, needs to require systematic procedures to get the solution. As such, integral loading requires high accuracy. There are various solutions given to mathematics. To solve problems related to integral rational functions (specifically polynomials with a denominator of two degrees) by using

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx = \frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}} \ln\left(\frac{2ax+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2ax+b+\sqrt{b^2-4ac}}\right)+C$$

***Keyword**: integral, rational functions, systematics*

PENDAHULUAN

Dalam menyelesaikan permasalahan yang berkaitan dengan persamaan diferensial umumnya (persamaan diferensial biasa), sering dijumpai langkah-langkah prosedur penyelesaian yang memuat integral khususnya intergal fungsi rasional. Penyelesaian soal persamaan diferensial biasa membutuhkan prosedural yang sistematis untuk mendapatkan solusi yang tepat. Hal ini dapat dilihat dalam Ros (2004).

Prosedur tersebut juga membutuhkan ketelitian yang harus dikuasai, salah satunya kemampuan dalam mengintegralkan suatu fungsi. Menurut Purcell dan Varberg (1987) mengintegralkan suatu fungsi *f* untuk memperoleh fungsi baru F yaitu

$$\int f(x)dx = F(x)+C$$

Purcell dan Varberg (1987) yang diterjemahkan oleh Susila, dkk (2003) menjelaskan bahwa pengintegralan fungsi rasional membutuhkan ketelitian dalam menyelesaikannya. Sebelum di integralkan, terlebih dahulu fungsinya di jabarkan menjadi pecahan parsial (faktor linear). Terdapat 5 kemungkinan dalam menjabarkan pecahan parsial. 1) faktor linear yang berlainan, 2) faktor linear berbeda, 3) faktor linear yang berulang, 4) faktor kuadrat yang berbeda, dan 5) faktor kuadrat yang berulang.

Lima kemungkinan di atas, sudah di bahas dengan jelas pada Purcell dan Varberg (1987) yang diterjemahkan oleh Susila, dkk (2003). Dari masing-masing kemungkinan tersebut, memiliki penyelesaian yang berbeda pula. Dengan demikian, dalam menyelesaikan soal yang berkaitan dengan persamaan diferensial (biasa) khususnya,

ISBN: 978-602-0791-28-9

diperlukan ketelitian dan kecermatan dalam mengenali pengintegralan. Pengintegralan disini adalah pengintegralan fungsi rasional khususnya fungsi rasional yang kuadrat.

Menurut Purcell dan Varberg (1987) yang diterjemahkan oleh Susila, dkk (2003) fungsi rasional adalah hasibagi dua fungsi suku banyak (polinomial). Contoh,

$$f(x)=\frac{2}{(x+1)^5}$$

$$p(x)=\frac{2x+1}{x^2-4}$$

$$s(x)=\frac{2x^2+1}{x-4}$$

Terdapat dua macam fungsi rasional yaitu fungsi rasional sejati dan fungsi rasional tidak sejati. Fungsi rasional sejati merupakan fungsi rasional yang derajat pembilang kurang dari derajat penyebut, sedangkan fungsi rasional tidak sejati dapat ditulis dalam jumlah fungsi suku banyak dan fungsi rasional sejati. Contohnya,

$$s(x)=\frac{2x^2+1}{x-4} \Leftrightarrow s(x)=2x+\frac{8x+1}{x-4}$$

Dalam Penelitian ini, peneliti hanya memfokuskan dalam menurunkan formula integral fungsi rasional sejati khususnya fungsi rasional sejati dengan penyebutnya berderajat dua. Dengan formula ini, tidak perlu mencermati kemungkinan dalam penjabaran pecahan rasioanal. Formula ini sudah mencangkup ke lima kemungkinan tersebut. Dengan demikian, saat kita menjumpai integral fungsi rasional, cukup menggunakan formula ini khususnya polinomial berpangkat dua. Formula-formula yang berkaitan dengan integral telah dirangkum dan dapat dilihat dalam Spiegel (1968).

METODE

Metode penelitian yang digunakan adalah metode penelitian kepustakaan (*library research*). Peneliti mengumpulkan dan menggunakan informasi-informasi yang relevan dengan penelitian yang dilakukan. Menurut Supriyadi (2016) penelitian menggunakan metode kepustakaan berarti mengumpulkan data penelitian dengan menelaah atau mengeksplor informasi yang relevan dengan jurnal, buku, dan dokumen-dokumen (cetak atau non-cetak) yang berkaitan dengan penelitian.

Hal ini juga sependapat dengan Khatibah (2011) yang menyatakan bahwa metode pengumpulan data literatur, catatan, hasil membaca yang mana literatur yang digunakan berbentuk media cetak, media elektronik, dan dokumen yang berkaitan dengan perpustakaan disebut metode penelitian kepustakaan.

Dari keterangan di atas dapat diketahui bahwa penelitian kepustakaan (*library research*) merupakan penelitian tentang kajian-kajian atau informasi yang relevan dengan jurnal, buku, dokumen atau pendukung lainnya yang berkaitan dengan topik penelitian.

HASIL

Dalam menyelesaikan persamaan diferensial, biasanya memuat penggunaan integral maupun turunan. Untuk mempermudah dalam menentukan solusi dari intergral fungsi rasional khususnya yang memuat ax^2+bx+c akan dibahas sebagai berikut.

Untuk menyelesaikan

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,dx \qquad (1)$$

terlebih dahulu mengubah $\dfrac{1}{ax^2+bx+c}$ menjadi

$$\frac{1}{ax^2+bx+c}=\frac{1}{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}} \qquad (2)$$

Karena persamaan (2) merupakan bentuk kuadrat, untuk mendapatkan akar-akar dari bentuk kuadrat tersebut dengan

ISBN: 978-602-0791-28-9

menggunakan metode menyempurnakan kuadrat, maka diperoleh,

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad (3)$$

Persamaan (3) disubstitusikan ke persamaan (1) diperoleh,

$$\int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx =$$

$$\frac{1}{a}\int \left(\frac{1}{\left(x + \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right)\left(x + \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right)} \right) \qquad (4)$$

Untuk menyelesaikan persamaan (4) dengan langkah berikut.

$$\frac{1}{\left(x + \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right)\left(x + \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right)} =$$

$$\frac{A}{\left(x + \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right)} + \frac{B}{\left(x + \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right)} \qquad (5)$$

Dari persamaan (5) diperoleh

$$1 = A\left(x + \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) + B\left(x + \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) \qquad (6)$$

Untuk mendapatkan nilai A dan B dari persamaan (6) yang dapat dibentuk menjadi sistem persamaan linear berikut.

$$\begin{aligned} A \quad &+ B = 0 \\ A\left(\frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) &+ B\left(\frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) = 1 \end{aligned} \qquad (7)$$

Dengan menggunakan cara substitusi, eliminasi, atau gabungan dari persamaan (7) diperoleh

$$B = \frac{a}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \text{ dan } A = -\frac{a}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \qquad (8)$$

Persamaan (8) disubstitusikan ke persamaan (5) didapatkan,

$$\frac{1}{\left(x + \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right)\left(x + \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right)} =$$

$$-\frac{\frac{a}{\sqrt{b^2 - 4ac}}}{\left(x + \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right)} + \frac{\frac{a}{\sqrt{b^2 - 4ac}}}{\left(x + \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right)} \qquad (9)$$

Dengan menggunakan persamaan (9), persamaan (4) menjadi

$$\int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx =$$

$$\frac{1}{a}\int \left(-\frac{\frac{a}{\sqrt{b^2 - 4ac}}}{\left(x + \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right)} + \frac{\frac{a}{\sqrt{b^2 - 4ac}}}{\left(x + \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right)} \right) dx \qquad (10)$$

Dari persamaan (10) didapatkan

$$\int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx =$$

$$\int \left(-\frac{1}{\sqrt{b^2 - 4ac}\left(x + \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right)} + \frac{1}{\sqrt{b^2 - 4ac}\left(x + \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right)} \right) dx$$

atau

$$\int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx =$$

$$\frac{1}{\sqrt{b^2 - 4ac}}\int \left(-\frac{1}{\left(x + \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right)} + \frac{1}{\left(x + \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right)} \right) dx$$

atau

$$\int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx =$$

$$\frac{1}{\sqrt{b^2 - 4ac}}\left(-\ln\left| \frac{2ax + b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right| + \ln\left| \frac{2ax + b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right| \right)$$

atau

$$\int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx =$$

$$\frac{1}{\sqrt{b^2 - 4ac}}\left(\ln \frac{\left| 2ax + b - \sqrt{b^2 - 4ac} \right|}{\left| 2ax + b + \sqrt{b^2 - 4ac} \right|} \right) + C \bullet \qquad (11)$$

SIMPULAN

Dengan menggunakan formula pada persamaan (11), dapat mempermudah

ISBN: 978-602-0791-28-9

menyelesaikan permasalahan matematika yang berkaitan dengan integral tersebut. Keunggulan menggunakan formula ini adalah mempermudah dalam menemukan hasil integral tersebut daripada menggunakan prosedural yang terstruktur, karena terdapat lima kemungkinan (faktor linear yang berlainan, faktor linear berbeda, faktor linear yang berulang, faktor kuadrat yang berbeda, dan faktor kuadrat yang berulang).

Dari kelima kemungkinan tersebut jika menggunakan prosedural yang sistematis akan membutuhkan waktu yang lebih untuk menyelesaikannya. Dengan menggunakan persamaan (11) tidak perlu mempertimbangkan kelima kemungkinan dalam menjabarkan fungsi rasional menjadi pecahan parsial (fungsi linear).

DAFTAR RUJUKAN

[1] Supriyadi, "*Connubity of Practitioners*, Solusi Alternatif Berbagai Pengetahuan Antar Pustakaan", di Lentera Pustaka, Vol. 2, No. 2, 83-93, 2016
[2] Purcell, E.J., Varberg, D., Rigdon,S.E. "Kalkulus Jilid 1", Jakarta: Erlangga. 2003
[3] Ross, S.L. "*Differential Equations Third Edition"*, Dehli: John Wiley and Sons, 2004
[4] Spiegel, M.R. "*Mathematical Handbook of Formulas and Tables"*, Sidney, 1968.
[5] Khatibah. "Penelitian kepustakaan", di Iqra': Jurnal Perpustakaan dan Informasi, Vol. 5, No. 01, 36-39, 2011.